1783

Miscellanea analytica

Leonhard Euler

1°. Si $n = 1$ fiet $a = 309 \pm 152$ et $s = 289 \pm 76$, qui valores iam nimis funt magni quam quos operi pretium fit euoluiffe.

Exemplum 4.

§. 34 Sit $r = 25$ et $rr = 625 = 24^2 + 7^2$, ideoque $b = 24$ et $c = 7$. Iam effe debet $7f - 24g = \pm 2$, hincque erit $a = ff + gg$ et $s = 24f + 7g$. Cafus fimpliciffimus dat $f = 10$ et $g = 3$, hinque $a = 109$ et $s = 261$; vnde fi ftatuatur $s = 625n \pm 261$, reperietur generatim $a = 625nn \pm 522n + 109$. Euoluamus autem numerice cafum $a = 109$, qui methodo vulgari moleftiffimos calculos requirit; cum ergo fit $s = 261$, ob $r = 25$ erit $p = 6525$ et $q = 261^2 + 2 = 68123$, ex quibus defiderati numeri maximi deducuntur,

$$x = 6525\left(\frac{68123^2 - 1}{2}\right) = 15140424455100$$

$$y = 68123\left(\frac{68123^2 - 1}{2}\right) = 158070671986249.$$

Exemplum 5.

§. 35. Sit $r = 29$ et $rr = 841 = 21^2 + 20^2$, ideoque $b = 21$ et $c = 20$, fierique debet $20f - 21g = \pm 2$, hincerit $a = ff + gg$ et $s = 21f + 20g$. Cafu autem fimpliciffimo erit $f = 2$ et $g = 2$, hinc $a = 8$ et $s = 82$; ftatuatur ergo $s = 841n \pm 82$, fietque $a = 841nn \pm 164n + 8$, vnde autem numeri vehementer magni nafcuntur.

Ex his igitur abunde perfpicitur, quemadmodum, ope horum fubfidiorum cafus problematis Pelliani alioquin difficillimi fatis expedite refolui queant.

THEO-

9 ± 76, qui
eri pretium fit
M
T
$f^2 + 7^2$, ideo-
$g = \pm 2$, hinc-
Cafus fimplicis-
9 et $s = 261$;
etur generatim
autem nume-
moleftiffimos
ob $r = 25$ erit
ibus defiderati
Si n
3. . .
illum
Quan
huius
Acade
haud i
nem r
tem q
quiden
meros,
quam
dua. S
$+ 20^2$, ideoque
$= \pm 2$, hinc-
autem fimpli-
: 82; ftatuatur
$\pm 164n + 8$,
cuntur.
admodum, ope
lliani alioquin
per n
numer
numeri
quens
Eul
THEO-

MISCELLANEA ANALYTICA.

I.

Theorema a Cl. *Waring* fine demonftratione propofitum.

Si n fuerit numerus primus, hoc productum continuum: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$, vnitate auctum, femper diuidi poteft per illum numerum primum n.

Demonftratio.

Quanquam illuftris Geometra *de la Grange* iam geminam huius theorematis demonftrationem in nouis Actis Academiae regiae fcientiarum borufficae dedit: Geometris haud ingratum fore arbitror, fi etiam meam demonftrationem more mihi familiari communicauero. Propofito autem quocunque numero primo n, alio loco oftendi, quod quidem quilibet facile largietur, femper dari huiusmodi numeros, quorum fingulae poteftates, exponentem minorem quam $n - 1$ habentes, per n diuifae, diuerfa praebeant refidua. Sit igitur a huiusmodi numerus, cuius fingulae poteftates

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ldots\ a^{n-2}$$

per n diuifae totidem diuerfa refidua producant, quorum numerus cum fit $n - 1$, in his refiduis omnes occurrent numeri $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n-1$, quibus exhauftis fequens poteftas a^{n-1} iterum per n diuifa relinquet refiduum $+1$,

$+ 1$, perinde ac prima a^0. Cum ergo post hanc haec formula $a^{n-1} - 1$ demum per n fit diuisibilis, ob $n - 1$ numerum parem, qui sit $= 2p$, ita vt $n = 2p + 1$, vel formula $a^p - 1$, vel haec, $a^p + 1$, per numerum primum n diuisibilis sit necesse est. Priore autem casu a^p residuum daret $+ 1$, quod cum nostrae hypothesi aduersetur, posterior formula $a^p + 1$ per n erit diuisibilis, siue potestas a^p residuum dabit $- 1$, seu $n - 1$. His praemissis, quoniam singula residua $1, 2, 3, 4, \ldots \ldots n - 1$, oriuntur ex potestatibus a^0, a^1, a^2, etc. $\ldots\ldots a^{n-2}$, manifestum est, productum omnium eorum residuorum, scilicet productum propositum $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n - 1)$, si per n diuidatur, idem residuum esse relicturum, quod productum omnium earum potestatum $a^{0+1+2+3+\ldots (n-2)}$, siue haec potestas: $a^{(n-1)(n-2):2}$ esset daturum. Cum autem sit $n = 2p + 1$, erit $n - 1 = 2p$ et $n - 2 = 2p - 1$, ideoque haec potestas fiet a^{2pp-p}, quae reducitur ad hanc: $a^{2p(p-1)+p}$, quae est productum ex his duabus potestatibus $a^{2p(p-1)}$ et a^p. Verum iam vidimus, potestatem a^{2p}, siue a^{n-1}, per n diuisam, residuum dare $+ 1$, quod idem resultabit ex omnibus eius potestatibus, cuiusmodi est $a^{2p(p-1)}$; at altera potestas a^p residuum relinquit $- 1$, vnde ipsius potestatis a^{2pp-p} residuum erit $- 1$. Sicque haec formula $a^{2pp-p} + 1$ per numerum n erit diuisibilis; substituto igitur producto $1 \cdot 2 \ldots (n-1)$ in locum potestatis a^{2pp-p}, haec formula: $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) + 1$, per numerum primum n erit diuisibilis.

Corollarium 1.

Hinc facile plures aliae similes formulae deduci possunt, quae singulae pariter per numerum primum

n

n erunt diuisibiles, quas cum ipsa formula vnde sunt natae, hic apponamus:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1) + 1$$
$$1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-2) - 1$$
$$1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-3) + 1$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-4) - 1 \text{ etc.}$$

In his autem formulis numerus n non eo vsque diminui debet, donec fiat $n = 0$.

Corollarium 2.

Si porro habeatur progressio arithmetica n terminorum, cuius differentia neque sit n, neque multiplum ipsius, in ea inerit vnus terminus per n diuisibilis, quo excluso productum reliquorum terminorum vnitate auctum semper erit diuisibile per numerum n, siquidem fuerit numerus primus. Ita si sit $n = 7$ et formetur haec progressio arithmetica 7 terminorum: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, reiecto termino 14 haec forma $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 20 + 1$ diuidi poterit per 7.

II. Problema.

Inuenire quatuor numeros integros tales, vt producta ex binis vnitate aucta fiant quadrata.

Solutio.

Problema hoc in Elementis meis Algebrae fusius tractaui, methodus vero, qua sum vsus, minus erat accommodata ad numeros integros inueniendos. Haec autem quaestio eo est difficilior, quod sex conditionibus satisfieri

opor-

oportet. Nunc igitur sequentem solutionem satis simplicem exhibeo. Sumtis pro lubitu duobus numeris m et n, vt fiat $mn+1=ll$, quatuor numeri quaesiti erunt:

$$\text{I. } m;\ \text{II. } n;\ \text{III. } m+n+2l;\ \text{IV. } 4l(l+m)(l+n),$$

quibus 6 conditiones praescriptae sequenti modo implentur:

1°. $mn+1=ll$.

2°. $m(m+n+2l)+1=(l+m)^2$.

3°. $n(m+n+2l)+1=(l+n)^2$.

4°. $4m.l(l+m)(l+n)+1=(2ll+2lm-1)^2$.

5°. $4n.l(l+m)(l+n)+1=(2ll+2ln-1)^2$

denique

6°. $4l(m+n+2l)(l+m)(l+n)+1=(4ll+2lm+2ln-1)^2$.

Hic vero plurimum obseruasse iuuabit numerum l tam positiue quam negatiue accipi posse. Ita si sumatur $m=3$ et $n=8$, vt fiat $mn+1=25$, ideoque $l=\pm 5$, casus $l=-5$ dabit hos quatuor numeros:

I. 3. II. 8. III. 1 et IV. 120.

Sin autem capiatur $l=+5$, numeri erunt

I. 3. II. 8. III. 21 et IV. 2080.

Analysis ad hanc solutionem perducens.

Cum tres priores numeri m, n et $m+n+2l$, facillime inueniantur, ponatur quartus $=z$, atque his tribus conditionibus satisfieri debebit:

1°. $mz+1=\square$.

2°. $nz+1=\square$.

3°. $(m+n+2l)z+1=\square$.

Hinc ergo etiam harum trium formularum productum debebit

satis simpli- ieris m et n, erunt: $m)(l+n)$, odo implen- $m-1)^2$. $n-1)^2$ $+2ln-1)^2$. m l tam po- iatur $m=3$ ± 5, casus cens. $+n+2l$, ;que his tri- oductum de- bebit

bebit esse quadratum; at calculo instituto hoc productum reperietur:

$$1+2(m+n+l)z+((m+n+l)^2-1)zz$$
$$+mn(m+n+2l)z^3=\square,$$

cuius radix, vt tria priora membra tollantur, statuatur $1+(m+n+l)z-\frac{1}{2}zz$, cuius quadratum est:

$$1+2(m+n+l)z+((m+n+l)^2-1)zz$$
$$-(m+n+l)z^3+\tfrac{1}{4}z^4$$

vnde nascitur haec aequatio

$$mn(m+n+2l)=-m-n-l+\tfrac{1}{4}z,$$
$$\text{siue } \tfrac{1}{4}z=m+n+l+mn(m+n+2l),$$
$$\text{siue } \tfrac{1}{4}z=(mn+1)(m+n+l)+lmn,$$

vel quia $mn+1=ll$ habebimus

$$ll(m+n+l)+lmn=l(ll+lm+ln+mn)$$
$$=l((l+m)(l+n)),$$

quo circa inuenimus

$$z=4l((l+m)(l+n)).$$

Quanquam autem hic tantum productum ex tribus formulis $mz+1$, $nz+1$, $(m+n+2l)z+1$ reddidimus quadratum: tamen quia pro z quasi praeter exspectationem prodiit numerus integer, vnde tres istae formulae inter se euadent primae, tuto concludere possumus, etiam singulas ternas formulas fieri quadrata, quorum radices adeo iam supra exhibuimus.

III.

Problema.

Inuenire numeros x et y, vt haec formula $\left(\frac{xx\pm 1}{x}\right)^2+\left(\frac{yy\pm 1}{y}\right)^2$ fiat quadratum.

Solu-

Solutio.

Primo haec conditio sponte adimplebitur, si capiatur $y=\frac{x+1}{x-1}$, tum enim fiet $\frac{yy+1}{y}=\frac{2(xx+1)}{xx-1}$, vnde formula proposita abibit in hanc formam:

$$\frac{(xx+1)^2}{xx}+\frac{4(xx+1)^2}{(xx-1)^2}=\frac{(xx+1)^4}{xx(xx-1)^2},$$

quae formula iam per se est quadratum. Verum quia haec solutio tantum est specialis, quo generaliorem obtineamus statuamus

$$y=\frac{px-1}{x+p}\text{, vnde fiet }\frac{yy+1}{y}=\frac{(pp+1)(xx+1)}{(x+p)(px-1)},$$

quare formula nostra euadet

$$\frac{(xx+1)^2}{xx}+\frac{(pp+1)^2(xx+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

quae per quadratum $(xx+1)^2$ diuisa abit in hanc:

$$\frac{1}{xx}+\frac{(pp+1)^2}{(x+p)^2(px-1)^2},$$

quae per quadratum $xx(x+p)^2(px-1)^2$ multiplicata dat $(x+p)^2(px-1)^2+xx(pp+1)^2$ Haec iam formula quadratum effici debet, quae euoluta reducitur ad istam:

$$ppx^4+2p(pp-1)x^3+2(p^4-pp+1)xx$$
$$-2p(pp-1)x+pp,$$

cuius radix secundum praecepta cognita si statuatur

$$pxx+(pp-1)x+p,$$

elicietur iste valor: $x=\frac{4p}{pp-1}$, vbi ergo numerus p pro lubitu accipi potest; tum vero pro altero numero y habebimus vti assumsimus

$$y=\frac{px-1}{x+p}=\frac{3pp+1}{p(pp+3)}.$$

Hinc ergo si sumatur $p=2$, fiet $x=\frac{8}{3}$ et $y=\frac{13}{14}$ et

$$\frac{xx+1}{x}=\frac{73}{24}\text{ et }\frac{yy+1}{y}=\frac{365}{182},$$

quorum quadratorum summa fit quadratum radicis $\frac{73.109}{2.12.91}$.

Pro-

bitur, si capia-
, vnde for-
rum quia haec
m obtineamus
in hanc:
multiplicata
iam formu-
tur ad istam:
atuatur
merus p pro
numero y ha-
et
Pro-

IV.
Problema.

Inuenire duos numeros p et q, quorum summa sit quadratum, summa vero quadratorum biquadratum.

Solutio.

Hoc Problema, a *Leibnizio* olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod minimi numeri sint vehementer magni, siquidem positiui desiderentur. Quamuis autem hoc problema iam passim occurrat solutum, tamen haec solutio attentione non indigna videtur. Ponamus autem $p+q=B^2$ et $pp+qq=A^4$. Iam a duplo posterioris aequationis $2pp+2qq=2A^4$, subtrahatur quadratum prioris $pp+2pq+qq=B^4$ et residuum erit

$$pp-2pq+qq=2A^4-B^4\text{, ideoque}$$
$$p-q=\sqrt{(2A^4-B^4)},$$

sicque totum negotium huc reducitur, vt formula $2A^4-B^4$ quadratum reddatur. Vt autem ambo numeri p et q prodeant positiui necesse est vt sit $B>A$. Statuamus igitur

$$\sqrt{(2A^4-B^4)}=yy+2xy-xx,$$

quod eueniet si capiatur

$$A^2=xx+yy\text{ et }B^2=xx+2xy-yy,$$

quas ergo binas formulas denuo ad quadrata redigi oportet. Cum autem posterior sit $(x+y)^2-2yy$, pro vtraque conditione faciamus $y=2abcd$; tum vero pro priore $x=aabb-ccdd$, pro posteriore autem $x+y=aacc+2bbdd$, sic enim fiet

$$A=aabb+ccdd\text{ et }B=aacc-2bbdd.$$

Quia

Quia autem habemus

$$x = aabb - ccdd \text{ et } y = 2abcd,$$

erit hinc

$$x + y = aabb - ccdd + 2abcd = aacc + 2bbdd,$$

vnde deducimus

$$aa = \frac{2abcd - dd(2bb + cc)}{cc - bb},$$

vnde radicem extrahendo reperimus

$$a = \frac{bcd \pm \sqrt{bbccdd - dd(2bb + cc)(cc - bb)}}{cc - bb},$$

vnde per euolutionem fit $\frac{a}{d} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{cc - bb}$, vel per conuersionem $\frac{d}{a} = \frac{bc \pm \sqrt{(2b^4 - c^4)}}{2bb + cc}$. Hoc igitur modo resolutionem formulae $\sqrt{(2A^4 - B^4)}$ reduximus ad resolutionem alius formulae prorsus similis $\sqrt{(2b^4 - c^4)}$, vnde si vnicus casus constet, quo talis formula rationalis euadit inde continuo alius casus concludi poterit. Cum igitur hoc primo eueniat sumendo $b = 1$ et $c = 1$, erit $\frac{a}{d} = \frac{1 \pm 1}{0}$, seu ex posteriori forma $\frac{d}{a} = \frac{1 \pm 1}{3}$. Sumatur ergo $\frac{d}{a} = \frac{2}{3}$, siue $a = 3$ et $d = 2$, fietque $x = 5$ et $y = 12$, tum vero $A = 13$ et $B = 1$, atque hinc:

$$yy + 2xy - xx = (x + y)^2 - 2xx = 239,$$

quae est radix quadrata formulae $2 \cdot 13^4 - 1$. Quia autem hic $B < A$, hinc nulla solutio idonea sequitur. Hoc autem casu reperto faciamus nunc $b = 13$ et $c = 1$, fietque $\sqrt{(2b^4 - c^4)} = 239$, sicque porro nanciscimur $\frac{a}{d} = \frac{13 \pm 239}{-168}$, vnde ob signum ambiguum binae solutiones oriuntur: vel $\frac{a}{d} = -\frac{3}{2}$, vel $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$. Ex priore ergo casu habemus $a = 3$, $b = 13$, $c = 1$ et $d = -2$, vnde colligimus $x = 1521 - 4 = 1517$ et $y = -156$, tum vero $A = 1525$ et $B = -1343$. Quia autem huius litterae B tantum quadratum et biquadratum occurrit, sumi poterit $B = 1343$, qui valor cum minor sit quam $A = 1525$, nullam solutionem desideratam praebet.

Consideremus ergo alterum casum, quo $\frac{a}{d} = \frac{113}{84}$, vnde nostrae quaternae litterae erunt $a = 113$, $b = 13$, $c = 1$ et $d = 84$, ex quibus si colligantur valores x, y et A, B, erit $B > A$, hincque enormes illi numeri pro p et q colliguntur problemati satisfacientes.

Problema 4.

Si formula $1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 +$ etc. *fuerit productum ex factoribus* $1 + \alpha z$, $1 + \beta z$, $1 + \gamma z$, $1 + \delta z$, *etc. inuenire summam potestatum omnium litterum* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *etc.*

Solutio.

Summas istas quas quaerimus ita designemus:

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \text{etc.}$$

vbi totum negotium huc redit, vt valores litterarum P, Q, R, S, etc. per litteras A, B, C, D, etc. determinentur. Hic autem ante omnia obseruari conuenit, litteram P a sola littera A pendere, quippe cui est aequalis; deinde littera Q tantum a duabus litteris A et B pendere potest, quoniam producta ex ternis litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. non ingrediuntur in compositionem quadratorum. Eodem

modo

modo littera R tantum pendebit a tribus litteris A, B, etc. at littera S inuoluet has tantum quatuor: A, B, C et D; et ita simili modo de sequentibus.

1°. His praenotatis littera P eodem modo reperietur, ac si formula esset tantum $1+Az$ et litterae reliquae B, C, D, E, euanescerent; hoc autem casu vnicus factor locum habet, qui sit $1+az$, ita vt sit $P=a$. Iam posito hoc factore $1+az=0$, siue $z=-\frac{1}{a}$, ipsa formula euanescere debet, eritque idcirco $1-\frac{A}{a}=0$ siue $a-A=0$, vnde fit $a=P=A$, vti quidem notissimum est.

2°. Littera autem Q eundem valorem fortietur ac si formula nostra foret $1+Az+Bzz$, reliquis terminis euanescentibus Haec autem formula duos habet factores, qui sint $1+az$ et $1+bz$; hincque erit $P=a+b$ et $Q=a^2+b^2$. Fiat nunc $1+az=0$, siue $z=-\frac{1}{a}$, et hoc casu ipsa nostra formula debet euanescere, eritque

$$1-\frac{A}{a}+\frac{B}{a^2}=0$$

siue $a^2-Aa+B=0$. Eodem modo ex altero factore $1+bz$ orietur haec aequatio: $b^2-Ab+B=0$. Addantur hae duae aequationes et loco a^2+b^2 scribendo Q et P loco $a+b$ orietur haec aequatio: $Q-AP+2B=0$, vnde colligitur $Q=AP-2B$.

3°. Verus porro valor ipsius R deducetur ex formula $1+Az+Bz^2+Cz^3$, cuius tres factores sint

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)$$

ita vt habeamus

$$P=a+b+c;\ Q=a^2+b^2+c^2 \text{ et } R=a^3+b^3+c^3.$$

Quem-

Que itteris A, B, etc.
prim A, B, C et D;
fiue modo reperie-
facto litterae reliquae
u vnicus factor
quae $= a.$ Iam po-
, ipsa formula
fiue $a-A=0$,
n est.
:m fortietur ac
collig eliquis terminis
habet factores,
hincq $P=a+b$ et
$z=-\frac{1}{a}$, et hoc
eritque.
Quod altero factore
reduc $B=0$. Addan-
cribendo Q et
$P+2B=0$,
'ucetur ex for-
quae factores sint
Hinc $a^3+b^3+c^3$.
testat Quem-

Quemlibet horum factorum redigamus ad nihilum et ex primo fiet $z=\frac{1}{a}$, vnde ipsa formula praebebit

$$1-\frac{A}{a}+\frac{B}{a^2}-\frac{C}{a^3}=0,$$

siue $a^3-Aa^2+Ba-C=0$. Simili modo bini reliqui factores dabunt

$$b^3-Ab^2+Bb-C=0 \text{ et } c^3-Ac^2+Bc-C=0,$$

quae tres aequationes iunctae dabunt

$$R-AQ+BP-3C=0, \text{ vnde } R=AQ-BP+3C.$$

4°. Pari modo littera S ex hac formula:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4$$

colligitur, cuius quatuor factores sint

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)$$

hincque

$$P=a+b+c+d,\qquad Q=a^2+b^2+c^2+d^2,$$
$$R=a^3+b^3+c^3+d^3 \text{ et } S=a^4+b^4+c^4+d^4.$$

Quod si nunc singuli factores seorsim nihilo aequentur et reductio fiat vt ante, orientur inde 4 sequentes aequationes:

$$a^4-Aa^3+Ba^2-Ca+D=0$$
$$b^4-Ab^3+Bb^2-Cb+D=0$$
$$c^4-Ac^3+Bc^2-Cc+D=0$$
$$d^4-Ad^3+Bd^2-Cd+D=0$$

quae additae hanc formulam suppeditant:

$$S-AR+BQ-CP+4D=0, \text{ hincque}$$
$$S=AR-BQ+CP-4D.$$

Hinc iam facile intelligitur, quomodo etiam superiores potestates, scilicet T, U, V, etc. ex praecedentibus forman-

tur

tur, quem in finem fingulos hos valores ordine apponamus:

$$P=A,$$
$$Q=AP-2B,$$
$$R=AQ-BP+3C,$$
$$S=AR-BQ+CP-4D,$$
$$T=AS-BR+CQ-DP+5E,$$
$$U=AT-BS+CR-DQ+EP-6F,$$
etc. etc.

Problema 5.

§. 8. *Inuenire adeo quinque numeros huius indolis, vt producta ex binis vnitate aucta fiant quadrata.*

Solutio.

Problema hoc vires analyfeos diophanteae fuperare cenferi deberet, nifi cafu quodam fingulari folutio poffibilis redderetur. In primo autem problemate iam exhibuimus quatuor huiusmodi numeros, eosque adeo integros, qui his conditionibus gaudent, fcilicet fumtis pro lubitu duobus numeris m et n, ita vt fiat $mn+1=ll$, quatuor numeri fatisfacientes ita fe habebunt:

$$a=m;\ b=n;\ c=m+n+2l;\ \text{et}\ d=4l((l+m)(l+n)).$$

Nunc igitur praefens quaeftio huc redit, vt quaeratur quintus numerus z, qui cum iftis quatuor conditionibus praefcriptis fatisfaciat; requiritur ergo vt fequentes quatuor formulae fingulae reddantur quadrata:

$$1+az=\square;\ 1+bz=\square;\ 1+cz=\square;\ 1+dz=\square;$$

quibus fi fingulis fatisfieri deberet infuperabilia obftacula occurrerent. Hic autem vti fupra feliciter vfu venit, vt fi modo

modo productum harum quatuor formularum quadratum efficiatur etiam fingulae feorfim quadrata fint futura. Multiplicentur igitur hae quatuor formulae in fe inuicem, ac ponatur breuitatis gratia productum:

$$1+pz+qzz+rz^3+sz^4$$

ita vt fit

$$p=a+b+c+d;\ q=ab+ac+ad+bc+bd+cd;$$
$$r=abc+abd+acd+bcd\ \text{et}\ s=abcd.$$

Nunc ftatuatur radix quadrata iftius formulae

$$1+\tfrac{1}{2}pz+(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)zz,$$

vt eius quadratum fiat

$$1+pz+qz^2+p(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)z^3+(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)^2z^4,$$

vbi cum tres priores termini fponte fe tollant, reliqui per z^3 diuifi fuppeditabunt hanc aequalitatem:

$$r+sz=p(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)+(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)^2z$$

vnde colligimus quintum numerum quaefitum:

$$z=\frac{r-p(\frac{1}{2}q-\frac{1}{8}pp)}{(\frac{1}{2}q-\frac{1}{8}pp)^2-s}.$$

Verum fi indolem 4 numerorum datorum accuratius perpendamus, reperiemus femper fore $\frac{1}{2}q-\frac{1}{8}pp=-\frac{1-s}{2}$, vnde denominator inuentae fractionis euadet:

$$(\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{8}pp)^2-s=\frac{(1-s)^2}{4},$$

ficque commode euenit vt hic denominator fiat quadratum; nifi enim hoc contigiffet, fingulae formulae:

$$1+az;\ 1+bz;\ 1+cz;\ 1+dz;$$

quadrata fieri non potuiffent. Quod fi etiam in numeratore

 iftum

istum valorem loco $(\frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pp)$ substituamus, fiet $z = \frac{4r + 2p(s+q)}{(s-1)^2}$. Hoc autem numero z inuento omnino decem sequentibus conditionibus satisfiet:

I°. $ab + 1 = \Box$; II°. $ac + 1 = \Box$;
III°. $ad + 1 = \Box$; IV°. $bc + 1 = \Box$;
V°. $bd + 1 = \Box$; VI°. $cd + 1 = \Box$;
VII°. $az + 1 = \Box$; VIII°. $bz + 1 = \Box$;
IX°. $cz + 1 = \Box$; X°. $dz + 1 = \Box$.

Corollarium.

Quod autem semper sit $\frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pp = \frac{-s-1}{2}$, sequenti modo ostendi potest. Ponatur breuitatis gratia $m + n + l = f$ et $l(l+m)(l+n) = k$, ita vt sit $k = fll + lmn$, et cum sit $a = m$; $b = n$; $c = f + l$; et $d = 4k$, habebimus

$$a + b + c = 2f, \text{ ergo } p = 2f + 4k;$$

deinde quia

$$q = (a + b + c)d + (a + b)c + ab,$$

fiet nunc

$$q = 8fk + (m+n)^2 + 2l(m+n) + mn,$$

quae expressio ob $mn = ll - 1$ abit in hanc: $q = 8fk + ff - 1$; tum vero erit $s = 4mnk(f+l)$, hinc erit

$$1 + q + s = 8fk + ff + 4mnk(f+l)$$

quod an aequale sit ipsi $\frac{1}{4}pp$ videamus. At est

$$\frac{1}{4}pp = ff + 4fk + 4kk,$$

hisque valoribus inter se aequatis habebimus

$$8fk + ff + 4mnk(f+l) = ff + 4fk + 4kk, \text{ siue}$$
$$4fk + 4mnk(f+l) = 4kk$$

quae

quae aequatio per $4k$ diuisa dat

$$f + mn(f+l) = k = fll + lmn, \text{ siue}$$
$$f + fmn = 4ll, \text{ ob } mn + 1 = ll$$

per hypothesin, quae aequatio cum sit identica, illa: $1 + q + s = \frac{1}{4}pp$ necessario est vera, vnde sequitur quod assumsimus $\frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pp = \frac{-s-1}{2}$.

Exemplum 1.

Sumamus $m = 1$ et $n = 3$, eritque $l = 2$, vnde quatuor numeri priores erunt $a = 1$; $b = 3$; $c = 8$; $d = 120$ hinc ergo colligimus:

$$p = 132;\ q = 1475;\ r = 4224 \text{ et } s = 2880;$$

ex quibus valoribus deducimus:

$$z = \frac{4 \cdot 4224 + 264 \cdot 4355}{(2879)^2};$$

quae fractio reducitur ad hanc $\frac{777480}{8288641}$, atque hinc decem conditiones praescriptae sequenti modo adimplentur:

1°. $ab + 1 = 2^2$; 2°. $ac + 1 = 3^2$;
3°. $ad + 1 = 11^2$; 4°. $bc + 1 = 5^2$;
5°. $bd + 1 = 19^2$; 6°. $cd + 1 = 31^2$;
7°. $az + 1 = \frac{(3011)^2}{(2879)^2}$; 8°. $bz + 1 = \frac{(3259)^2}{(2879)^2}$;
9°. $cz + 1 = \frac{(3809)^2}{2879^2}$; 10°. $dz + 1 = \frac{10079^2}{2879^2}$.

Exemplum 2.

Cum numerus z hinc prodierit tam vehementer magnus, euoluamus sequentem casum in fractionibus, quandoquidem fractiones admittere nunc sumus coacti. Sumatur

igitur

igitur $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{5}{2}$, vt fit $l = \frac{3}{2}$, vnde quatuor numeri priores erunt

$$a = \tfrac{1}{2};\ b = \tfrac{5}{4};\ c = 6 \text{ et } d = 48;$$

vnde porro deducimus:

$$p = 57;\ q = 451\tfrac{1}{4};\ r = 931\tfrac{1}{2} \text{ et } s = 360;$$

ex his ergo deducitur:

$$z = \frac{4 \cdot 931\frac{1}{2} + 114 \cdot 361}{359^2} = \frac{44880}{359^2} = \frac{44880}{128881}$$

qui numeri multo funt minores quam praecedentes.

VARIAE

uatuor numeri

360;

80
881
edentes.

VARIAE

VARIAE OBSERVATIONES
CIRCA ANGVLOS
IN PROGRESSIONE GEOMETRICA PROGREDIENTES.

§. 1.

Cum pleraeque infignes proprietates, quae adhuc circa angulos, fiue arcus, eorumque finus, cofinus, tangentes, cotangentes, fecantes et cofecantes funt inueftigatae, ex confideratione arcuum in arithmetica progreffione crefcentium fint deriuatae: non minus notatu dignae videntur illae proprietates, quas ex confideratione arcuum in geometrica progreffione procedentium deducere licet; imprimis cum earum veritas plerumque multo magis abfcondita videatur, quocirca hoc loco plures eiusmodi proprietates euoluere conftitui.

§. 2. Primum fontem ad huiusmodi fpeculationes nobis aperit notiffima formula: $\sin. 2\Phi = 2 \sin. \Phi. \cos. \Phi$ vnde, fi s denotet arcum fiue angulum quemcunque, erit

$\sin. s = 2 \sin. \frac{1}{2}s. \cos. \frac{1}{2}s$; tum vero fimili modo erit
$\sin. \frac{1}{2}s = 2 \sin. \frac{1}{4}s. \cos. \frac{1}{4}s$, qui valor ibi fubftitutus praebet
$\sin. s = 4 \sin. \frac{1}{4}s. \cos. \frac{1}{2}s \cos. \frac{1}{4}s$. Deinde quia porro eft
$\sin. \frac{1}{4}s = 2 \sin. \frac{1}{8}s. \cos. \frac{1}{2}s$, hoc valore fubftituto erit
$\sin. s = 8 \sin. \frac{1}{8}s. \cos. \frac{1}{2}s. \cos. \frac{1}{4}s. \cos. \frac{1}{8}s$. Pari modo progrediendo eft

$\sin. s = 16 \sin. \frac{1}{16}s. \cos. \frac{1}{2}s. \cos. \frac{1}{4}s. \cos. \frac{1}{8}s. \cos. \frac{1}{16}s$